Wichtige Sätze und Definitionen der Analysis I für Informatiker

Reelle Zahlen

Definition: Körperaxiome

Gegeben sei eine Menge K und zwei Operationen „+" und „ $\cdot$ " auf K, d.h. zu zwei Elementen $a, b \in K$ existiert $a+b \in K$, $a \cdot b \in K$;

Man nennt K einen Körper, wenn folgende Regeln gelten:

(A1) Kommutativgesetz: $a+b=b+a$

(A2) Assoziativgesetz: $(a+b)+c=a+(b+c)$

(A3) Distributivgesetz: $(a+b) \cdot c=ac+bc$

(A4) Neutrales Element: Es gibt ein $0 \in K$ mit $a+0=a$ und eine $1 \in K$ mit $a \cdot 1=a$

(A5) Inverses Element: Zu jedem $a \in K, a \neq 0$ existiert ein $-a \in K \; mit \; a+(-a)=0$
und ein $a^{-1} \in K \; mit \; a \cdot a^{-1}=1$

Bemerkung: Jeder Körper hat mindestens zwei Elemente, nämlich 0 und 1

Definition: Ordnungaxiome in Körpern

Gegeben sein Körper K sowie eine Relation „ $<$ ". Mann nennt K einen geordneten Körper, wenn folgende Regeln gelten:

(A6) Trichotomiegesetz: Genau eine der Aussagen $a<b, a=b, b<a$ ist wahr

(A7) Transitivitätsgesetz: Aus $a<b$ und $b<c$ folgt: $a<c$

(A8) Monotoniegesetz: Aus $a<b$ folgt immer: $a+c<b+c$ und aus $a<b, c>0$ folgt immer: $a \cdot c<b \cdot c$

Satz 1.2 (Rechenregeln in geordneten Körpern)

Sei K ein geordneter Körper. Dann gilt:

(i) Genau dann gilt $a<b$ wenn $-a>-b$

(ii) Genau dann gilt $ab>0$ wenn entweder $a, b>0$ oder $a, b<0$ insbesondere gilt:
$a^2>0 \; für \; a \neq 0, 1>0$

(iii) Ist $a<b, c<0$ so gilt: $ac>bc$

Definition: Supremum und Infimum

Sei K ein geordneter Körper:

- Eine nicht-leere Teilmenge $A \subseteq K$ heißt nach oben(unten) beschränkt, wenn es eine Zahl $M \in K$ gibt, mit $a \leq M \; (a \geq M)$ für alle $a \in A$. Man nennt M eine obere (untere) Schranke.
- Eine Zahl $\xi \in K$ heißt Supremum (Infimum) von A und man schreibt $\xi = supA \; (\xi = infA)$ wenn $\xi \leq M \; (\xi \geq M)$ für jede obere (unter) Schranke M von A gilt: Gilt $\xi \in A$, so heißt ξ Maximum(Minimum) von A und man schreibt $\xi = maxA \; (\xi = minA)$.
- Ist A nach oben und unten beschränkt, so heißt A beschränkt.
- Ist A nach oben(unten) unbeschränkt (d.h. nicht beschränkt), so schreibt man $supA=+\infty$ $(infA=-\infty)$.

Definition 1.4 (Vollständigkeitsaxiom und reelle Zahlen)

Ein geordneter Körper, der neben den Axiomen (A1) - (A8) noch das (A9) Vollständigkeitsaxiom - jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum erfüllt, heißt Körper der reellen Zahlen und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Definition 1.5 (Betrag, Vorzeichen)

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| :=$ Betrag von a, $sign(a) :=$ das Vorzeichen (Signum) von a

Satz 1.3 (Rechenregeln für den Betrag)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|a| \leq b \Leftrightarrow \pm a \leq b \; (d.h. \; a \leq b \; und \; -a \geq b)$

(ii) $|a|>0$ für $a \neq 0$, $|a|=0$ für $a=0$

(iii) $|ab|=|a||b|$

(iv) $|a+b| \leq |a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)

(v) $||a|-|b|| \leq |a-b|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Definition 1.6 (Umgebung, offene Mengen)

Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $\varepsilon>0$ heißt die Menge $B_\varepsilon(a)=\{x \in \mathbb{R} : |a-x|<\varepsilon\}$ eine ε -Umgebung von a. Jede Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ zu der ein $\varepsilon>0$ existiert mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U$ heißt Umgebung von a. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen, wenn A Umgebung für jeden Punkt(Zahl) $a \in A$ ist.

Eine Teilmenge $B \in \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R} \backslash B$ offen ist.

Definition 1.7 (natürliche Zahlen, induktive Mengen)

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ heißt induktiv, wenn Folgendes gilt:

(N1) $1 \in S$

(N2) $x \in S \rightarrow n+1 \in S$

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N} := \cap \{ S \subseteq \mathbb{R} : S \text{ ist induktiv} \} = \{ n \in \mathbb{R}, \text{ für jede induktive Menge } S \in \mathbb{R} \text{ gilt } n \in S \}$

$\mathbb{Z} := \{ n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \text{ oder } n = 0 \text{ oder } -n \in \mathbb{N} \}$

$\mathbb{Q} := \{ \frac{m}{n} \in \mathbb{R} : n, m \in \mathbb{R}, n \neq 0 \}$

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

<u>Satz 1.4 (Prinzip der vollständigen Induktion)</u>
Die Menge $\mathbb{N}$ ist induktiv. Ist $S \subseteq \mathbb{N}$ induktiv, so folgt $S = \mathbb{N}$.
Satz 1.4 begründet zwei der wichtigsten Verfahren in der Mathematik:
1. das Rekursionsprinzip, welches rekursive Definitionen erlaubt
2. den Beweis durch vollständige Induktion

<u>Satz 1.5 (Beweisverfahren der vollständigen Induktion)</u>
Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage A(n) gegeben und Folgendes sei erfüllt:
(IV) Induktionsverankerung - Die Aussage A(1) ist wahr
(IS) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Implikation $A(n) \rightarrow A(n+1)$ wahr

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr

<u>Satz 1.6 (Eigenschaften von $\mathbb{N}$)</u>
(i) für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \geq 1$
(ii) ist $n \in \mathbb{N}$, so gibt es kein $x \in \mathbb{N}$ mit $n < x < n+1$
(iii) gilt $m, n \in \mathbb{N}$ so folgt $m+n, m \cdot n \in \mathbb{N}$; für $m > n$ folgt auch $m - n \in \mathbb{N}$
(iv)(Wohlordnung von $\mathbb{N}$) Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum

<u>Binomische Formel:</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n}) a^k b^{n-k}$$

<u>Satz 1.7 (Eigenschaften/Rechenregeln für Potenzen)</u>
Sei K ein Körper:
(i) für $x, y \in K$ mit $x, y \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{R}$ gilt $x^{m+n} = x^m \cdot x^n, (x^m)^n = x^{mn} \text{ und } (xy)^n = x^n y^n$
(ii) ist K geordnet, so folgt für $x, y \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ aus $0 < x < y$ auch $x^n < y^n$

<u>Satz 1.8 (Rechnen mit reellen Zahlen)</u>
(i) (Archimedische Eigenschaft) zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$. D.h. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nach oben unbeschränkt.
(ii) (Satz des Eudoxos) zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$
(iii) ist x eine reelle Zahl mit $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $x = 0$
(iv) zu beliebigen reellen Zahlen ε , u > 0 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \varepsilon > u$
(v) (Dichtheit der rationalen Zahlen) zu je zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$

<u>Satz 1.9 (Bernoullische Ungleichung)</u>
Für jede reelle Zahl $x > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$
Im Fall $x \neq 0$ und $n \geq 2$ gilt sogar $(1+x)^n > 1 + nx$

<u>Satz und Definition 1.10 (Wurzeln)</u>
Gegeben sei eine reelle Zahl $a \geq 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$
Dann besitzt eine Gleichung $x^n = a$ genau ein Lsg. $x \geq 0$
Diese Lsg. wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet und n-te Wurzel von a genannt. Für $n = 2$ schreiben wir $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$ und nennen $\sqrt{a}$ Quadratwurzel von a.

<u>Folgerung 1.11</u>
Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a| = \sqrt{a^2}$. Die allgemeinen Rechenregeln für Wurzeln erhalten wir später, wenn die Exponentialfunktion eingeführt ist.

<u>Satz und Definition (Komplexe Zahlen)</u>
Die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ mit den beiden Operationen

$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$
$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$
bildet einen Körper. Dieser Körper heißt Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Vereinbarung:
Mit Paaren $(a, 0)$ wird in $\mathbb{C}$ genauso wie mit den Zahlen $a\in\mathbb{R}$ gerechnet. Wir schreiben daher sofort a statt $(a, 0)$. Wir setzen $i=(0,1)$ (imaginäre Einheit). Dann gilt $i^2=(0,1)(0,1)$. Damit hat $x^2+1=0$ eine Lsg. in $\mathbb{C}$. Eine Zahl $(a, b)\in\mathbb{C}$ kann nun der Form:
$(a, b)=a(1,0)+b(0,1)=a+ib$ geschrieben werden.
Dann gilt für $z, w\in\mathbb{C}$ mit $z=a+ib, w=c+id$
$z+w=(a+c)+i(b+d)$
$z\cdot w=(ac-bd)+i(ad+bc)$

Definition 1.8 (Realteil und Imaginärteil)
Seien $a, b\in\mathbb{R}$ und sei $z=a+ib$. So heißt
$a=\mathrm{Re}(z)$ Realteil von z
$b=\mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z
$\bar{z}=a-ib$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Bemerkung: Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ kann $\mathbb{C}$ nicht geordnet werden wegen: $i^2=-1$

Definition 1.9 (Betrag in $\mathbb{C}$)
Für $z\in\mathbb{C}$ heißt $|z|:=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2+(\mathrm{Im}\, z)^2}$ der Betrag von z. Für reelle Zahlen ist dieser neue Betrag nach Folgerung 1.11 konsistent mit dem in Definition 1.5 eingeführten Betrag. Daher besteht ein Problem, da für den Betrag in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ dasselbe Symbol für den Betrag vorhanden ist. Jedoch wird dieses Problem insofern gelöst, dass unter der Wurzel keine negativen Zahlen stehen dürfen und die Wurzel selbst immer positiv ist.

Satz 1.13 (Rechenregeln für den Betrag in $\mathbb{C}$)
Für beliebige $z, w\in\mathbb{C}$ gilt:
(i) $|z|=|\bar{z}|$
(ii) $\frac{i}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z\neq 0$
(iii) $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\leq|z|\leq|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|$
(iv) $|z|\geq 0$ Genau dann gilt: $|z|=0$ wenn $z=0$
(v) $|zw|=|z|\cdot|w|$
(vi) (Dreiecksungleichung) $|z+w|\leq|z|+|w|$
(vii) (umgekehrte Dreiecksungleichung) $||z|-|w||\leq|z-w|$

Definition 1.10 (Umgebung und offene Mengen in $\mathbb{C}$)
Sei $a\in\mathbb{C}$. Für $\varepsilon>0$ heißt die Menge $B_\varepsilon(a)=\{z\in\mathbb{C}: |a-z|<\varepsilon\}$ eine ε -Umgebung von a.
Eine Teilmenge $A\subseteq\mathbb{C}$ heißt offen, wenn A Umgebung eines jeden Punktes $a\in A$ ist.
Eine Teilmenge $B\subseteq\mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{C}\setminus B$ offen ist.

Funktionen
Definition 2.1 (surjektive, injektive, bijektive Funktionen)
Eine Funktion $f: D\to B$ heißt
- surjektiv, wenn es zu jedem $y\in B$ ein $x\in D$ gibt, mit $f(x)=y$
- injektiv, wenn auf $x_1, x_2\in D$ und $f(x_1)=f(x_2)$ stets $x_1=x_2$ folgt
- bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist

Definition 2.2 (Umkehrabbildung)
Sei $f: D\to B$ eine bijektive Funktion. Dann gibt es zu jedem $y\in B$ genau ein $x\in D$ mit $f(x)=y$. Durch $f^{-1}(y)=x$ wird also eine Abbildung $f^{-1}: B\to D$ definiert. Diese Abbildung heißt Umkehrabbildung von f oder zu f inverse Funktion.

Definition 2.3 (Verkettung von Funktionen)
Sind $f: A\to B$ und $g: B\to C$ Funktionen, so heißt die Funktion $g\circ f: A\to C$, $(g\circ f)(x):=g(f(x))$ für $x\in A$ die Verkettung von f und g oder Hintereinanderausführung von f und g.

Achtung:
Verkettung nur möglich wenn Wertebereich von f im Definitionsbereich von g liegt

Definition 2.4 (beschränkte bzw. monotone Funktion)
Eine Funktion $f: D\to\mathbb{R}$ heißt nach oben (unten) unbeschränkt, wenn ein $M\in\mathbb{R}$ existiert mit $f(x)\leq M$ $(f(x)\geq M)$ für alle $x\in D$. Ist f nach oben und unten beschänkt, so heißt f beschränkt. Eine Funktion

$f:D\to\mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn es ein $M\in\mathbb{R}$ mit $|f(x)|\leq M$ für alle $x\in D$ gibt.
Eine Abbildung $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (fallend), wenn für alle $x,y\in D$ aus $x<y$ immer $f(x)\leq f(y)(f(x)\geq f(y))$ folgt. Man nennt f streng monoton wachsend (fallend), wenn für $x,y\in D$ aus $x<y$ immer $f(x)<f(y)(f(x)>f(y))$ folgt.

Bemerkung:
Jede streng monotone Funktion ist injektiv. Also existiert die Umkehrfunktion, welche selbst wieder streng monoton ist.

Definition 2.5 (Addition und Multiplikation von Funktionen, reziproke Funktion)
Sei $K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$. Für zwei Funktionen $f,g:D\to K$ mit dem selben Definitionsbereich D, heißen die durch
$f+g:D\to K$, $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$ für $x\in D$
$fg:D\to K$, $(fg)(x):=f(x)\cdot g(x)$ für $x\in D$
definierten Funktionen $f+g,fg:D\to K$ die Summer bzw. das Produkt von f und g.

Gilt $f(x)\neq 0$ für alle $x\in D$, so nennt man die durch $\frac{1}{f}:D\to K$, $\frac{1}{f}(x):=\frac{1}{f(x)}$ für $x\in D$ definierte Funktion $\frac{1}{f}$ die zu f reziproke Funktion.

Satz 2.1 (Polynomdivision mit Rest)
Zu zwei Polynomen $p,q\neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome r,s, so dass gilt: $p=sq+r$ mit $grad(p)<grad(q)$ oder $n=0$.

Satz 2.2 (Faktorisieren von Polynomen)
Ein Polynom p vom Grad $n\geq 1$ hat höchstens n Nullstellen. Sind $x_1,x_2,\dots,x_k\in K$, $k\leq n$, paarweise verschiedene Nullstellen von p, so gibt es Zahlen $n_1,n_2,\dots,n_k\in\mathbb{N}$ mit $n_1+n_2+\dots+n_k\leq n$, sowie ein eindeutig bestimmtes Polynom s vom Grad $n-(n_1+n_2+\dots+n_k)$ mit
$$p(x)=s(x)\prod_{L=1}^{k}(x-x_L)^{n_L}=s(x)(x-x_L)^{n}(x-x_2)^{x_2}\dots(x-x_k)^{n_k}\quad \text{für}\quad x\in K \quad\text{und}\quad s(x_1)\neq 0,s(x_2)\neq 0,\dots,s(x_k)\neq 0$$

Satz 2.3 (Identitätssatz für Polynome)
Existieren für zwei Polynome $p(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ und $q(x)=b_nx^n+\dots+b_1x+b_0$ vom Grad höchstens n mindestens n+1 paarweise verschiedene Punkte $x_k\in K, k\in\{0,1,\dots,n\}$ mit $p(x_k)=q(x_k)$, so folgt $a_k=b_k$ für jedes $k\in\{0,1,\dots,n\}$ und damit $p=q$.
Diesen Identitätssatz für Polynome verwendet man oft, um einen Koeffizientenvergleich zu machen.

Satz und Definition 2.4 (Entwickeln eines Polynoms)
Ist p ein Polynom vom Grad n, so gibt es zu jedem $a\in K$ eindeutig bestimmte Zahlen $b_n,\dots,b_1,b_0\in K,b_n\neq 0$, mit:
$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-a)^k=b_n(x-a)^n+\dots+b_1(x-a)+b_0$$
Diese Darstellung heißt Entwicklung des Polynoms p um den Entwicklungspunkt a.

Satz und Definition 2.5 (Polynominterpolation nach Lagrange)
Zu n+1 paarweise verschiedenen Punkten $x_0,x_1,\dots,x_n\in K$ und n+1 Werten $y_0,y_1^{'}\dots,Y_n\in K$ existiert genau ein Polynom p vom Grad höchstens n mit $p(x_k)=y_k$ für $k\in\{0,1,\dots,n\}$. Dieses Polynom ist gegeben durch
$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kL_k(x)\quad\text{mit}\quad L_k(x):=\prod_{l=0,l\neq k}^{n}\frac{x-x_l}{x_k-x_l}=\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k 0 x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$
Die Polynome $L_{0,}L_{1,\dots},L_n$ heißen Lagrange-Polynome zu den Stützstellen $x_{0,}x_{1,}\dots x_n$.

Satz und Definition 2.6 (Abspalten des Nebenteils einer rationalen Funktion)
Zu einer rationalen Funktion $h=\frac{p}{q}$ existieren eindeutig bestimmte Polynome r und s mit $h=s+\frac{r}{q}$, so dass $\frac{r}{q}$ eine echt rationale Funktion ist. Man nennt s den Nebenteil und q den Hauptteil von h.

Für eine Polynom verschwindet der Hauptteil, für eine echt rationale Funktion der Nebenteil. Kannt man eine Nullstelle a des Nennerpolynoms q, so kann vom Hauptteil $\frac{r}{q}$ einer rationalen Funktion h ein Partialbruch mit Pol a abgespalten werden.

Satz und Definition 2.7 (Abspalten eines Partialbruchs vom Hauptteil)

Ist $\frac{r}{q}$ eine echt rationale Funktion mit $grad(q) \geq 1$ und ist $a \in K$ eine Nullstelle von q, so gibt es einen Partialbruch $\frac{g}{(x-a)^k}$ mit Pol in a und $k \leq grad(q)$ sowie eindeutig bestimmte Polynome u und v mit $q=(x-a)^k v, v(a) \neq 0$, $grad(u) < grad(v) = grad(q) - k$ und $\frac{r}{q} = \frac{u}{v} + \frac{g}{(x-a)^k}$.

Grenzwert und Häufungspunkte

Definition 3.1 (konvergente Folgen und Grenzwerte)

Eine Folge $(a_n)_n$ von reellen (komplexen) Zahlen heißt konvergent, wenn es eine reelle (komplexe) Zahl a gibt, so dass zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Die Zahl a heißt dann Grenzwert der Folge, und man schreibt:

$a = \lim_{n \to \infty} a_n$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

In Formeln bedeutet dies: $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

Wenn eine Folge nicht konvergiert, so heißt sie divergent. Konvergiert die Folge gegen 0, so nennt man sie eine Nullfolge.

Definition 3.2 (Teilfolgen und Häufungspunkte)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Ist $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennt man die Folge $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$. Eine Zahl a heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_n$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ gibt, die gegen a konvergiert.

Satz 3.1 (Charakterisierung von Häufungspunkten)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge von reellen oder komplexen Zahlen. Eine Zahl a ist genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Indices $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

Bemerkung: Das Konvergenzverhalten und die Häufungspunkte einer Folge ändern sich nicht, wenn man endlich viele Folgenglieder verändert.

Satz 3.2 (grundlegende Eigenschaften konvergenter Folgen)

(i) Wenn eine Folge konvergiert, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.
(ii) Eine konvergente Folge ist beschränkt.
(iii) Eine konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.
(iv) Jede konstante Folge konvergiert und die Konstante ist ihr Grenzwert.

Satz 3.3 (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen reeller oder komplexer Zahlen mit Grenzwerten $a := \lim_{n \to \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \to \infty} b_n$. Dann konvergieren die Folgen $(a_n + b_n)_n, (a_n b_n)_n$ und $(|a_n|)_n$ und es gilt:

$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = ab$, $\lim_{n \to \infty} |a_n| = |a|$

Gilt $a \neq 0 \, und \, a_n \neq 0 \, für \, alle \, n \in \mathbb{N}$, so ist auch die Folge $(1/a_n)_n$ konvergent mit $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ (Kehrwert!)

Satz 3.4 (Grenzwerte wichtiger Folgen)

(i) $\lim_{n \to \infty} n^m g^n = 0$ für $q \in \mathbb{C} \, mit \, |q| < 1 \, und \, m \in \mathbb{N}_0$

(ii) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a|} = 1 \, für \, a \in \mathbb{C}, a \neq 0$

(iii) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = 0 \, für \, m \in \mathbb{N}$

(iv) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^m} = 1 \, für \, m \in \mathbb{N}$

Satz 3.5 (Sandwichprinzip für Folgen)

Seien $(a_n)_n, (b_n)_n und (c_n)_n$ drei Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergieren $(a_n)_n und (c_n)_n$ beide gegen den selben Grenzwert $b \in \mathbb{R}$, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent mit $\lim_{n \to \infty} b_n = b$

Satz 3.6 (Monotonie des Grenzwertes)

Seien $(a_n)_n und (b_n)_n$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Grenzwerte $\lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} b_n$.

Satz 3.7
Ist $(a_n)_n$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$, so konvergieren die beiden reellen Folgen $(\operatorname{Re} a_n) \mathit{und} (\operatorname{Im} a_n)$ gegen Re a bzw. Im a.

Sind umgekehrt $(b_n)_n \mathit{und} (c_n)_n$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten $b \in \mathbb{R}$ bzw. $c \in \mathbb{R}$, so konvergiert die komplexe Folge $(b_n + ic_n)$ gegen $b + ic$.

Satz 3.8 (Monotoniekriterium für Folgen)
Jede beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen konvergiert.

Satz 3.9 (Babylonisches Wurzelziehen)
Für jede Zahl $a > 1$ konvergiert die durch $a_1 := a, a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}) \mathit{für}\, n \geq 1$ rekursiv definierte Folge (a_n)_n monoton fallend gegen $\sqrt{a}$. Hierbei besteht die Fehlerabschätzung $0 < a_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}(a_n - \sqrt{a})^2$.

Satz 3.10 (Satz von Bolzano Weierstraß)
Jede beschränkte Folge von reellen oder komplexen Zahlen besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge und damit mindestens einen Häufungspunkt. Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Definition 3.3 (Limes superior und Limes inferior)
Ist $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, so heißt der nach Satz 3.10 existierende größte (kleinste) Häufungspunkt von $(a_n)_n$ Limes superior (Limes inferior) und wird mit $\lim_{n\to\infty} \sup a_n (\lim_{n\to\infty} \mathit{inf}\ a_n)$ bezeichnet.

Definition 3.4 (Uneigentliche Grenzwerte)
Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt uneigentlich konvergent oder besitmmt divergent gegen $+\infty$ (gegen $-\infty$) wenn es zu jeder Zahl $M \in \mathbb{R}$ ein $n_n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \geq M\,(a_n \leq M)$ für alle $n \geq n_0$. In diesem Fall schreibt man $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$.

Besitzt eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen eine uneigentlich gegen $+\infty(\mathit{gegen} - \infty)$ konvergente Teilfolge, so sagt man, dass $(a_n)_n$ den uneigentlichen Häufungspunkt $+\infty(-\infty)$ besitzt und schreibt $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = +\infty\ (\lim_{n\to\infty} \mathit{inf}\ a_n = -\infty)$

Unendliche Reihen
Definition 3.6 (Unendliche Reihen)

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ gesetzt.

Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ heißt dann eine unendliche Reihe und wir bezeichnet mit dem Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Die Zahl s_n nennt man die n-te Partialsumme der Reihe, die Zahlen a_k Glieder der Reihe.

Falls die Folge $(s_n)_n$ gegen eine Zahl s konvergiert, so nennt man die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und s den Grenzwert der Reihe. Dann bezeichnet man den Grenzwert mit demselben Symbol wie die Reihe selbst, man schreibt also: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Falls die Folge $(s_n)_n$ divergiert, so nennt man die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent. Unendliche Rehen mit Sartwert r werden analog eingeführt: $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$.

Satz und Definition 3.11 (geometrische Reihen)
Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ wird geometrische Reihe genannt. Sie konvergiert für jede komplexe Zahl q mit $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{(1-q)}$, für $|q| \geq 1$ ist diese Reihe divergent.

Satz 3.12 (Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen)
Konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so ist die Folge $(a_k)_k$ der Reihenglieder eine Nullfolge.

Satz 3.13 (Rechenregeln für konvergente Reihen)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente unendliche Reihen reeller (komplexer) Zahlen, und sei c eine reelle (komplexe) Zahl. Dann sind auch die unendlichen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$ konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k+\sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} ca_k=c\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Definition 3.7 (absolut bzw. bedingt konvergente Reihen)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe reeller oder komplexer Zahlen. Ist die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ divergent während $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bedinkt konvergent. Konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, so nennt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Satz 3.14

Jede absolut konvergente unendliche Reihe konvergiert. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so gilt für die Grenzwerte

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k|\leq\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad .$$

Satz und Definition 3.15 (Satz von Leibniz für alternierende Reihen)

Ist $(b_k)_k$ eine streng monoton fallende Nullfolge, so nennt man: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$ eine alternierende Reihe. Diese Reihe konvergiert, und für ihren Grenzwert s besteht die Abschätzung: $|s-\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_k|<b_{k+1}$.

Absolut konvergente Reihen

Satz und Definition 3.16 (Majoranten- und Minorantenkriterium für Reihen)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe reeller oder komplexer Zahlen.

(i) Gibt es reelle Zahlen c_k mit $|a_k|\leq c_k$ für alle $k\in\mathbb{N}$ und konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. (konvergente Majorante)

(ii) Gibt es reelle Zahlen c_k mit $|a_k|\geq c_k\geq 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ und divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ entweder bedingt konvergent oder divergent, aber sicher nicht absolut konvergent (divergente Minorante)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit den in (i) und (ii) genannten Eigenschaften heißt konvergente Majorante (divergente Minorante) von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 3.17 (Quotientenkriterium für Reihen)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe reeller oder komplexer Zahlen $a_k\neq 0$

(i) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es eine Zahl q mit $0\leq q<1$ und eine natürliche Zahl k_0 gibt mit: $|\frac{a_k+1}{a_k}|\leq q$ für alle $k\geq k_0$

(ii) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent, wenn es eine natürliche Zahl k_0 gibt mit: $|\frac{a_k+1}{a_k}|\geq 1$ für alle $k\geq k_0$

Satz 3.18 (Wurzelkriterium für Reihen)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe reeller oder komplexer Zahlen. Existiert eine Zahl q mit $0<q<1$ und eine natürliche Zahl n_0 mit $\sqrt[k]{|a_k|}\leq q$ für alle $k\geq k_0$,
so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. (Analog divergenter Fall)

Satz und Definition 3.19 (Cauchy-Produkt von von Reihen)

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen reeller oder komplexer Zahlen mit Grenzwerten a bzw. b. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit Grenzwert ab, es gilt also: $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = (\sum_{k=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_n)$.

Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ heißt Cauchy-Produkt von $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$.

Satz 3.20 (g-adische Darstellung reeller Zahlen)

Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, gegeben. Für jede Folge $(b_k)_k$ mit $b_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ für $k \geq 1$ konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{g^k}$ gegen eine reelle Zahl x mit $0 \leq x \leq 1$. Umgekehrt gibt es zu jeder reellen Zahl x mit $0 \leq x < 1$ eine Folge $(b_k)_k$ mit $b_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$, so dass es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $b_k = g-1$ für alle $k \geq k_0$.

Definition 3.8 (Exponentialfunktion)

Die durch $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ definierte Funktion heißt Exponentialfunktion.

Satz 3.21 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

(i) (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$. Ferner gilt $\exp(0) = 1$

(iii) Die Exponentialfunktion bildet $\mathbb{R}$ bijektiv und streng monoton steigend auf $]0, +\infty[$ ab.

(iv) Für eine reelle Zahl x gilt $0 < \exp(x) < 1$ falls $x < 0$ bzw. $\exp(x) > 1$ falls $x > 0$

Definition 3.9 (Eulersche Zahl)

Die Zahl $\exp(1)$ heißt Eulersche Zahl. Sie wird bezeichnet mit: $e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Satz 3.22 (Eigenschaften der Eulerschen Zahl)

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n + n!}$

(ii) Es gilt: $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Die erste Folge ist streng monoton steigend, die zweite ist streng monoton fallend.

(iii) Die Eulersche Zahl e ist irrational

Satz und Definition 3.23 (Logarithmus)

Die auf $]0, \infty[$ existierende Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt Logarithmusfunktion oder Logarithmus und wird mit log bezeichnet:

$\log:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ $\log(x) := \exp^{-1}(x)$ für $x \in]0, +\infty[$

Die Logarithmusfunktion hat folgende Eigenschaften:

(i) (Funktionalgleichung des Logarithmus) Für $x, y \in]0, +\infty[$ gilt $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(ii) Es gilt $\log(1) = 0 \, und \, \log(e) = 1$

(iii) Die Abbildung $\log:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv und streng monoton steigend

(iv) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\log(\exp(x)) = x$ Für alle $y \in]0, +\infty[$ gilt $\exp(\log(y)) = y$

Exponentialfunktion und Logarithmus zusammen machen das Rechnen mit Potenzen ungemein einfach. Wir verwenden sie, um endlich ganz allgemeinene Potenzen zu definieren. Hierzu dient die Beziehung:

$x^n = \exp(n \log(x))$ für $x \in \mathbb{R}^+ und \, n \in \mathbb{Z}$

Definition 3.10 (Potenzen)

Für eine reelle Zahl a > 0 und eine komplexe Zahl z heißt $a^z := \exp(z \log(a))$ die z-te Potenz von a. Die Zahl z wird Basis, die Zahl z Exponent genannt.

Satz 3.24 (Rechenregeln für Potenzen)

(i) Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z, w \neq 0$ gilt: $a^{z+w} = a^z a^w, a^z ¿^w = a^{zw} und \, (ab)^z = a^z b^z$.

(ii) Für $a, b, x \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $a < b$ auch $a^x < b^x$

Stetigkeit

Definition 4.1 (Stetigkeit, $\varepsilon-\sigma-Charakterisierung$)

Eine Funktion $f:D\to G$ heißt stetig im Punkt $a\in D$, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon>0$ eine Zahl $\sigma>0$ existiert, so dass für alle $x\in D$ mit $|x-a|<\sigma$ die Ungleichung $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ gilt. In Formeln bedeutet dies: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\sigma>0)(\forall x\in D)(|x-a|<\sigma\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$

Ist f in jedem Punkt $a\in D$ stetig, so nennt man f auf D (punktweise) stetig.

Satz 4.1 (Stetigkeit, Folgen-Charakterisierung)

Gegeben sei eine Funktion $f:D\to G$ sowie ein Punkt $a\in D$. Genau dann ist f im Punkt a stetig, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ auch die Folge $(f(x_n))_n$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$

Satz 4.2 (Rechenregeln für stetige Funktionen)

Seien $f,g:D\to G$ Funktionen. Sind f und g in einem Punkt $a\in D$ stetig, so gilt dies auch für die Funktionen $f+g\,und\,f\,g$. Ist f in a stetig mit $f(a)\neq 0$, so ist $\frac{1}{f}$ auf $D\setminus\{x\in D|f(x)=0\}$ definiert und ebenfalls in a stetig.

Seien $f:D\to\tilde{D}$ und $g:\tilde{D}\to G$ Funktionen. Ist f in einem Punkt $a\in D$ stetig und ist g im Punkt $f(a)$ stetig, so ist $g\circ f$ in a stetig.

Satz 4.3 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei $f:[c,d]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ streng monoton. Wenn f in einem Punkt $a\in[c,d]$ stetig ist, dann ist Umkehrfunktion $f^{-1}:f([c,d])\to\mathbb{R}$ im Punkt f(a) stetig.

Definition 4.2 (Fortsetzung bzw. Einschränkung einer Funktion)

Seien $A,\tilde{A},B$ drei nicht-leere Mengen. Gilt $A\subset\tilde{A}$ und sind $f:A\to B$ bzw. $F:\tilde{A}\to B$ Funktionen mit $f(x)=F(x)$ für alle $x\in A$, so heißt F eine Fortsetzung von f auf $\tilde{A}$. Die Funktion f wird die Einschränkung von F auf A genannt und auch mit $F|_A$ bezeichnet.

Definition 4.3 (Häufungspunkte, innere und isolierte Punkte einer Menge)

Es sei A eine Teilmenge reeller (komplexer) Zahlen. Ein Punkt $a\in A$ heißt isoliert, wenn es eine Umgebung $B_\varepsilon(a),\varepsilon>0$ von a gibt mit $B_\varepsilon(a)\cap A=\{a\}$. Gibt es ein $\varepsilon>0$ mit $B_\varepsilon(a)\subseteq A$, so nennt man a einen inneren Punkt von A. Eine reelle (komplexe) Zahl ξ heißt Häufungspunkt von A, wenn in jeder Umgebung $B_\varepsilon(\xi)$ ein Punkt $a\in A$ mit $a\neq\xi$ liegt.

Satz 4.4 (Offenheit bzw. Abgeschlossenheit von Mengen)

Es sei A eine Teilmenge reeller oder komplexer Zahlen. Genau dann ist A offen, wenn jeder Punkt aus A ein innerer Punkt ist. Genau dann ist A abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A in A liegt.

Definition 4.4 (kompakte Mengen)

Eine Teilmenge von $\mathbb{R}\,oder\,\mathbb{C}$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition 4.5 (Grenzwert bei Funktionen)

Sei $f:D\to G$ eine Funktion, und sei a ein Häufungspunkt von D. Die Funktion f hat den Grenzwert $b\in G$ für $x\to a$, und man schreibt: $\lim_{x\to a} f(x)=b$, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\sigma>0$ gibt mit $|f(x)-b|<\varepsilon$ für alle $x\in D\setminus\{a\}$ mit $|x-a|<\sigma$. In Formeln bedeutet dies: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\sigma>0)(\forall x\in D\setminus\{a\})(|x-a|<\sigma\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon)$.

Satz 4.5 (Stetigkeit und stetige Fortsetzbarkeit in einem Häufungspunkt)

Sei $f:D\to G$ eine Funktion, und sei a ein Häufungspunkt von D. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Genau dann existiert $\lim_{x\to a} f(x)=b$, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ in $D\setminus\{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_n$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$.

(ii) Gilt $a\in D$, so existiert $\lim_{x\to a} f(x)=b$ genau dann, wenn f im Punkt a stetig ist mit $f(a)=b$.

(iii)Gilt $a\notin D$, so existiert $\lim_{x\to a} f(x)=b$ genau dann, wenn f eine Fortsetzung F auf $D\cup\{a\}$ besitzt, die in a stetig ist mit $F(a)=b$

Definition 4.6 (uneigentliche Grenzwerte 1. Art bei Funktionen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und nach oben (nach unten) unbeschränkt. Eine Funktion $f: D \to G$ hat den Grenzwert $b \in G$ für $x \to +\infty (x \to -\infty)$, und man schreibt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ $(\lim_{x\to-\infty} f(x) = b)$,wenn es zu jedem $\varepsilon > 0 \, ein \, M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)-b| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $x > M \, (x < M)$.

Definition 4.7 (uneigentliche Grenzwerte 2. Art bei Funktionen)
Sei a Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ hat den uneigentlichen Grenzwert $+\infty(-\infty)$ für $x \to a$, und man schreibt $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty)$,
wenn es zu jedem M ein $\sigma \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) > M \, (f(x) < M)$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \sigma$. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und nach oben (nach unten) unbeschränkt, so erklärt man den uneigentlichen Grenzwert $\lim_{x\to+\infty} f(x) (\lim_{x\to-\infty} f(x))$ analog.

Definition 4.8 (einseitige Grenzwerte bei Funktionen)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei a ein Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f: D \to G$ hat den linksseitigen (rechtsseitigen) Grenzwert $b \in G$ für $x \to a- \, (x \to a+)$ und man schreibt: $\lim_{x\to a-} f(x) = b$ $(\lim_{x\to a+} f(x) = b)$, wenn $D \cap]-\infty, a[\, (D \cap]a, +\infty[)$ nicht-leer ist und $f|_{D\cap]-\infty,a[} (f|_{D\cap]a,+\infty[})$ den Grenzwert b für $x \to a$ besitzt.
Für den Fall $G = \mathbb{R}$ erklärt man die uneigentlichen einseitigen Grenzwerte analog.

Definition 4.9 (Landau-Symbole bei Funktionen)
Gegeben sei eine Funktion $f: D \to G$, ein innerer Punkt $a \in D$ sowie eine Umgebung $U \subset D$ von a. Ist dann für eine Funktion $g: U \to \mathbb{R}^+$ die Abbildung $f \setminus g$ auf U beschränkt (gilt $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$), so schreibt man $f(x) = O(g(x)) (f(x) = o(g(x)))$ für $x \to a$ und sagt f ist ein groß-O (klein-o) von g für $x \to a$.

Satz 4.6
Sei $f: D \to G$ stetig. Gilt $f(a) \neq 0$ für ein $a \in D$, so gibt es eine Umgebung $U \subset D$ von a mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Satz 4.7 (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen)
Ist $f: [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem y im Intervall zwischen f(c) und f(d) ein $x \in [c, d]$ mit $f(x) = y$.

Satz 4.8 (Satz von Weierstraß)
Ist D eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R} \, oder \, \mathbb{C}$, so nimmt jede stetige Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ auf D ein Maximum und ein Minimum an, d.h. Es gibt Punkte $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in D$.

Folgerung 4.9
(i) Ist $f: [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f(D) ein abgeschlossenes Intervall.
(ii) Ist $f: D \to \mathbb{C}$ stetig und ist D kompakt, so nimmt $|f|$ auf D ein Maximum und ein Minimum an.

Definition 4.10 (Funktionenfolge)
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei eine Funktion $f_n: D \to G$ gegeben. Dann heißt $(f_n)_n$ eine Funktionenfolge.

Definition 4.11 (Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen)
Eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n: D \to G$ heißt punktweise konvergent auf D, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_n$ konvergiert. Die durch $f: D \to G, f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, definierte Funktion f heißt Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_n$. Eine nicht punktweise konvergente Funktionenfolge heißt divergent.

Definition 4.12 (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen)
Eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n: D \to G$ heißt gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f: D \to G$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\beta \in \mathbb{N}$ exisitiert, so dass für jedes $x \in D$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Satz 4.10 (Stetigkeitstransport bei gleichmäßiger Konvergenz)
Sei $(f_n)_n$ eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen $f_n: D \to G$. Dann ist auch die Grenzfunktion $f: D \to G$ stetig.

Satz 4.11 (Weierstraßscher M-Test)

Sei $(f_n)_n$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n: D \rightarrow G$. Gibt es eine reelle Zahlenfolge $(c_n)_n$ mit $|f_n(x)| \leq c_n \forall x \in D\, und\, \forall n \geq 0$ und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, so konvergiert die unendliche Reihe von Funktionen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig gegen eine stetige Funktion.

Definition 4.13 (Potenzreihen)
Ist $(a_n)_n$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen und ist z_0 eine reelle oder komplexe Zahl, so heißt die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe. Den Punkt z_0 nennt man den Entwicklungspunkt, die Zahlen a_n die Koeffizienten der Potenzreihe. Im Entwicklungspunkt konvergiert jede Potenzreihe. Meistens betrachtet man die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, was oft durch eine Substitution $z - z_0 \rightarrow z$ erreicht werden kann.

Satz und Definition 4.12 (Konvergenz von Potenzreihen, Konvergenzradius)
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entweder für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent oder es existiert eine wohlbestimmte reelle Zahl $R \geq 0$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ konvergiert und für $|z| > R$ divergiert. Die Zahl R wird Konvergenzradius der Potenzreihe genannt. Falls die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, so setzt man $R = +\infty$.

Für jede reelle Zahl $r \in [0,R[$ (bzw. im Fall $R = +\infty$ für jedes $r \geq 0$) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leq r\}$ absolut und gliechmäßig. Damit wird durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine stetige Funktion $f: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert (für $R = +\infty$ ist hierbei $B_{+\infty}(0) := \mathbb{C}$ zu setzen).

Satz 4.13 (Berechnung des Konvergenzradius)
Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen.

- (Hadamard Formel) Setzen wir $H := \lim\sup_{n\rightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $R := \begin{cases} +\infty & für\, H = 0, \\ \frac{1}{H} & für\, H \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & für\, H = +\infty \end{cases}$ so hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Konvergenzradius R.
- (Euler Formel) Existiert der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert $R := \lim_{n\rightarrow\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$, so ist R gerade der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Satz 4.14 (Identitätssatz für Potenzreihen)
Gegeben seien zwei Potenzreihen $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit Konvergenzradien $R_f \neq 0$ bzw. $R_g \neq 0$. Existiert eine Nullfolge $(z_k)_k$ von komplexen Zahlen mit $z_k \neq 0, |z_k| < min\{R_f, R_g\}$ und $f(z_k) = g(z_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und damit $R_f = R_g\, und\, f = g$.

Satz und Definition 4.15 (Kreiszahl π)
Der Cosinus ist im Intervall [0,2] streng monoton fallend und besitzt dort genau eine Nullstelle. Diese bezeichnet man mit $\frac{\pi}{2}$ und π die Kreiszahl. Es gilt $2{,}8 < \pi < 3{,}2$.

Satz 4.16 (Nullstellen und Perioden des Cosinus, des Sinus und der Exponentialfunktion)
(i) Die Cosinus hat in $\mathbb{C}$ genau die Nullstellen $z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Die Sinusfunktion hat in $\mathbb{C}$ genau die Nullstellen $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Genau dann gilt: $\exp(z) = 1$, wenn $z = 2k\pi i$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) Cosinus- , Sinus- und Exponentialfunktion sind periodisch und jede Periode der Cosinus- und der Sinusfunktion bzw. der Exponentialfunktion ist ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\, bzw.\, von\, 2\pi i$. D.h. Genau dann gilt

$\cos(z+p)=\cos(z)\,\forall z\in\mathbb{C}$ *oder* $\sin(z+p)=\sin(z)\,\forall z\in\mathbb{C}$, wenn $p=2k\pi$ mit einem $k\in\mathbb{Z}$; genau dann gilt $\exp(z+p)=\exp(z)\,\forall z\in\mathbb{C}$, wenn $p=2k\pi i$ mit einem $k\in\mathbb{Z}$.

Satz 4.17 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes reelle oder komplexe Polynom vom Grad $n\geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Definition 4.14 (Z-Transformation)
Einer Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ wird durch $F(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$ eine unendliche Reihe F zugeordnet. Falls diese Reihe für ein $z\in\mathbb{C}$ konvergiert, so nennt man die Folge $(a_n)_n$ Z-transformierbar und die Funktion $Z[(a_n)_n]:=F$ ihre Z-Transformierte.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$ kann als eine Potenzreihe in der Variablen $\frac{1}{z}$ aufgefasst werden. Dass nicht z selbst als Variable gewählt wird, hat technische Gründe. Aus der Hadamard Formel 4.13 erhalten wir sofort folgenden Satz.

Satz 4.18
Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann Z-transformierbar, wenn $R:=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<+\infty$

In diesem Fall ist die Z-Transformierte $Z[(a_n)_n](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$ für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|>R$ definiert.

Satz 4.19 (Eigenschaften der Z-Transformation)
Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ *und* $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Z-transformierbare Zahlenfolgen.
(i) (Eindeutig) Gibt es eine Zahl r > 0 mit $Z[(a_n)_n](z)=Z[(b_n)_n](z)$ für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|>r$, so folgt $a_n=b_n$ für alle $n\geq 0$.
(ii) (Linearität) Für beliebige $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ ist die Folge $(\lambda a_n+\mu b_n)_n$ Z-transformierbar und es gilt $Z[(\lambda a_n+\mu b_n)_n](z)=\lambda Z[(a_n)_n](z)+\mu Z[(b_n)_n](z)$ für alle $z\in\mathbb{C}$, für welche alle auftretenden Z-Transformierten definiert sind.
(iii)(Verschiebungssatz) Für jedes $k\in\mathbb{N}$ ist $Z[(a_{n+k})_n](z)=z^k Z[(a_n)_n](z)-z^k\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{a_\mu}{z^\mu}$ für alle $z\in\mathbb{C}$, für welche eine und damit jede der auftretenden Z-Transformation definiert ist.

Für rekursion definierte Zahlenfolge des folgenden Typs werden wir mit der Z-Transformation eine explizite Darstellung erhalten.

Definition 4.15 (lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten)
Gegeben seien eine Zahl $m\in\mathbb{N}$, Zahlen $c_0,c_1,\ldots,c_{m-1}\in\mathbb{C}$ sowie eine Zahlenfolge $(b_n)_n$. Gilt für eine Zahlenfolge $(a_n)_n$ dann $a_{n+m}+c_m a_{n+m}+\ldots+c_1 a_{n+1}+c_0 a_n=b_n$ für alle $n\geq 0$,
so sagt man, dass $(a_n)_n$ eine lineare Rekursionsgleichung m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erfüllt. Im Fall $b_n=0$ für alle $n\geq 0$ heißt die Rekursionsgleichung homogen, andernfalls nennt man sie inhomogen und die Folge $(b_n)_n$ Inhomogenität. Das Polynom $p(z):=z^m+c_m z^{m-1}+\ldots+c_1 z+c_0$ wird charakteristische Polynom der Rekursionsgleichung genannt.

Satz 4.20
Genügt eine Zahlenfolge $(a_n)_n$ einer linearen homogenen Rekursionsgleichung m-ter Ordnung, so ist sie Z-transformierbar und ihre Z-Transformierte ist eine rationale Funktion. Es existiert dann eine Zahl r > 0 mit
$Z[(a_n)_n](z)=\frac{zq(z)}{p(z)}$ für $|z|>r$,

wobei p das charakteristische Polynom der Rekursionsgleichung ist und q ein Polynom mit $grad(q)\leq m$.

Satz 4.21
Genügt eine Zahlenfolge $(a_n)_n$ einer linearen inhomogenen Rekursionsgleichung m-ter Ordnung und ist die Inhomogenität $(b_n)_n$ Z-transformierbar, so ist auch (a_n) Z-transformierbar. Es gibt dann eine Zahl $r>0$ mit $Z[(a_n)_n](z)=\frac{z\,q(z)}{p(z)}+\frac{1}{p(z)}Z[(b_n)_n](z)$ für $|z|>r$, wobei p das charakteristische Polynom der Rekursion der Rekursionsgleichung ist und q ein Polynom mit $grad(q)\leq m$.

Differentiation und Integration
Definition 5.1 (Ableitung einer Funktion)

Eine Funktion $f:]c,d[\to\mathbb{C}$ heißt differenzierbar in einem Punkt $a\in]c,d[$, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die Ableitung oder der Differentialquotient von f in a und wird mit $f'(a), f^{(1)}(a)\, oder\, \frac{d}{dx}f(a)$ bezeichnet. Ist f in jedem Punkt]c,d[differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

Satz 5.1 ($o-$ Charakterisierung für Differenzierbarkeit)

Eine Funktion $f:]c,d[\to\mathbb{C}$ ist genau dann in einem Punkt $a\in]c,d[$ differenzierbar, wenn eine Zahl $D\in\mathbb{C}$ existiert mit $f(x)=f(a)+D(x-a)+o(x-a)\; für\; x\to a$.

In diesem Fall gilt dann $f'(a)=D$.

Satz 5.2 (Eigenschaften differenzierbarer Funktionen)

Ist eine Funktion $f:]c,d[\to\mathbb{C}$ in einem Punkt $a\in]c,d[$ differenzierbar, so ist f in a stetig.

Satz 5.3 (Rechenregeln für Ableitungen)

Gegeben seien zwei Funktionen $f,g:]c,d[\to\mathbb{C}$, die in einem Punkt $a\in]c,d[$ differenzierbar sind, sowie eine Funktion $F:]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[\to\mathbb{C}, \varepsilon>0$, die im Punkt f(a) differenzierbar ist:

(i) (Summenregel) f+g ist in a differenzierbar mit $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.

(ii) (Produktregel) fg ist in a differenzierbar mit $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

(iii)(Quotientenregel) Im Fall $g(a)\neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(x)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

(iv)(Kettenregel) $F\circ f$ ist in a differenzierbar mit $(F\circ f)'(a)=F'(f(a))f'(a)$.

Satz 5.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei g die Umkehrabbildung einer streng monotonen Funktion $f:]c,d[\to\mathbb{R}$. Ist f in einem Punkt $a\in]c,d[$ differenzierbar mit $f'(a)\neq 0$, so ist g im Punkt $b=f(a)$ differenzierbar mit $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(g(b))}$.

Definition 5.2 (einseitige Ableitungen einer Funktion)

Eine Funktion $f:]c,d[\to\mathbb{C}$ heißt linksseitig (rechtsseitig) differenzierbar in einem Punkt $a\in]c,d[$, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\left(\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die linksseitige (rechtsseitige) Ableitung von f in a und wird mit $f'(a-)(f'(a+))$ bezeichnet.

Definition 5.3 (höhere Ableitungen einer Funktion)

Ist eine Funktion $f:]c,d[\to\mathbb{R}$ differenzierbar und ist die Funktion $f':]c,d[\to\mathbb{R}$ in einem Punkt $a\in]c,d[$ differenzierbar, so heißt die Ableitung von f' in a die zweite Ableitung von f im Punkt a und wird mit $f''(a), f^{(2)}(a)\, oder\, \frac{d^2}{dx^2}f(a)$ bezeichnet. Die n-te Ableitung im Punkt a wird rekursiv definiert als die Ableitung von $f^{(n-1)}$ in a, falls $f^{(n-1)}$ auf $]c,d[$ differenzierbar ist. Sie wird mit $f^{(n)}(a)\, oder\, \frac{d^n}{dx^n}f(a)$ bezeichnet.

Existiert die n-te Ableitung $f^{(n)}$ in jedem Punkt $a\in]c,d[$, so wird f n-fach differenzierbar genannt, ist sie sogar auf $]c,d[$ stetig, so heißt f n-fach stetig differenzierbar. Existiert für jedes $n\in\mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf $]c,d[$, so heißt f beliebig oft differenzierbar.

Die Menge aller n-fach stetig differenzierbaren Abbildungen $f:]c,d[\to\mathbb{C}$ wird mit $C^n(]c,d[)$ bezeichnet, die Menge aller stetigen Funktionen $f:]c,d[\to\mathbb{C}$ mit $C^0(]c,d[)$, die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f:]c,d[\to\mathbb{C}$ mit $C^\infty(]c,d[)$.

Definition 5.4 (lokale und globale Extremalstellen)

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}\, oder\, \mathbb{C}$. Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ hat in einem Punkt $a\in D$ ein lokales Maximum (Minimum), wenn es eine Umgebung $U\subset D$ von a gibt, mit $f(x)\leq f(a)(f(x)\geq f(a))$ für alle $x\in U$. Sie hat in a ein globales Maximum (Minimum), wenn $f(x)\leq f(a)(f(x)\geq f(a))$ für alle $x\in D$

gilt.

Satz und Definition 5.5 (notwendige Bedingung für lokale Extremalstellen)
Besitzt eine Funktion $f:]c,d[\to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in]c,d[$ ein lokales Extremum und ist f in a differenzierbar, so gilt $f'(a)=0$.

Satz 5.6 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Satz von Rolle)
Ist eine Funktion $f:[c,d] \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall [c,d] stetig und auf dem offenen Intervall]c,d[differenzierbar, so gibt es einen Punkt $a \in]c,d[$ mit $\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=f'(a)$.
Gilt zusätzlich $f(c)=f(d)$, so existiert ein Punkt $a \in]c,d[$ mit $f'(a)=0$.

Satz 5.7 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Sind zwei Funktionen $f, g:[c,d] \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall [c,d] stetig und auf dem offenen Intervall]c,d[differenzierbar, und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]c,d[$, so gibt es einen Punkt $a \in]c,d[$ mit $\frac{f(d)-f(c)}{g(d)-g(c)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Satz 5.8 (Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen)
Sei $f:]c,d[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
(i) Gilt $f'(x)>0 (f'(x)<0)$ für alle $x \in]c,d[$, so ist f streng monoton wachsend (fallend)
(ii) Genau dann ist f monoton wachsend (fallend), wenn $f'(x) \geq 0 (f'(x) \geq 0)$ für alle $x \in]c,d[$.
(iii)Genau dann ist f konstant, wenn $f'(x)=0$ für alle $x \in]c,d[$.

Satz 5.9 (hinreichende Bedingung für Extremalstellen)
Ist $f:]c,d[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $f'(a)=0$ für ein $a \in]c,d[$, so hat f in a ein
- Maximum, falls $f'(x) \geq 0 \textit{ für alle } x \in]c,a[\textit{ und } f'(x) \leq 0 \textit{ für alle } x \in]a,d[$
- Minimum, falls $f'(x) \leq 0 \, \forall \, x \in]c,a[\textit{ und } f'(x) \geq \forall \, x \in]a,d[$

Ist außerdem f auf]c,d[zweimal differenzierbar, so hat f in a ein
- lokales Maximum, falls $f''(a)<0$,
- lokales Minimum, falls $f''(a)>0$.

Satz 5.10 (Schrankensatz für differenzierbare Funktionen)
Ist $f:]c,d[\to \mathbb{C}$ differenzierbar und existiert ein $M \geq 0$ mit $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in]c,d[$, so gilt $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ für alle $x, y \in]c,d[$.

Satz 5.11 (Identitätssatz der Differentialrechnung)
Sei $f:]c,d[\to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, sei $A \subset [c,d]$ eine Menge mit höchstens abzählbar unendlich vielen Punkten. Genau dann ist f konstant, wenn $f'(x)=0$ für alle $x \in [c,d] \setminus A$ gilt.

Differentiation und Integration
Definition 5.5 (Treppenfunktion)
Eine Funktion $t:[c,d] \to \mathbb{C}$ heißt Treppenfunktion, wenn es Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [c,d]$ gibt mit $c=x_0<x_1<\ldots<x_n=d$, so dass t in jedem offenen Intervall $]x_{k-1}, x_k[, k=1,2,\ldots,n$ konstant ist. Die Menge $Z=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ heißt dann eine Zerlegung von $[c,d]$. Die Menge aller Treppenfunktionen mit Definitionsbereich $[c,d]$ wird mit $T([c,d])$ bezeichnet.

Definition 5.6 (Regelfunktionen)
Eine Funktion $f:[c,d] \to \mathbb{C}$ heißt Regelfunktion, wenn in jedem Punkt $a \in]c,d]$ der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \to a-} f(x)$ und in jedem Punkt $a \in [c,d[$ der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \to a+} f(x)$ existiert. Die Menge aller Regelfunktionen mit Definitionsbereich $[c,d]$ wird mit $R([c,d])$ bezeichnet.

Satz 5.12 (wichtige Regelfunktionen)
- Ist $f:[c,d] \to \mathbb{C}$ stetig, so ist f eine Regelfunktion
- Ist $f:[c,d] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist f eine Regelfunktion

Satz 5.14 (Vollständigkeit der Klasse der Regelfunktionen)
Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Regelfunktionen ist selbst eine Regelfunktion.

Satz 5.5 (Eigenschaften von Regelfunktionen)
Jede Regelfunktion $f:[c,d] \to \mathbb{C}$ ist beschränkt und hat auf $[c,d]$ höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen.

Satz und Definition 5.16 (Integral einer Treppenfunktion)
Sei $t:[c,d]\to\mathbb{C}$ eine Treppenfunktion. Ist $Z=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ eine Zerlegung von $[c,d]$, so dass t auf $]x_{k-1},x_k[$, k = 1,2,...,n , konstant den Wert c_k annimmt, so ist die Zahl $\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k-x_{k-1})$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung Z.

Satz und Definition 5.17 (Integral einer Regelfunktion)
Sei $f:[c,d]\to\mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Für jede gleichmäßig gegen f konvergente Folge von Treppenfunktionen $t_n:[c,d]\to\mathbb{C}$ existiert dann der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\int_c^d t_n(x)dx$ und hängt nicht von der Wahl der Folge $(t_n)_n$ ab.

Satz 5.18 (Rechenregeln für Integrale)
- (Linearität) Für $f,g\in R([c,d])$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ gilt: $\int_c^d(\lambda f+\mu g)(x)dx=\lambda\int_c^d f(x)dx+\mu\int_c^d g(x)dx$
- (Beschränktheit) Für $f\in R([c,d]) mit |f(x)|\le M$ für $x\in[c,d]$ gilt: $|\int_c^d f(x)dx|\le\int_c^d |f(x)|dx\le M(d-c)$.
- (Monotonie) Für reellwertige $f,g\in R([c,d])$ mit $f\le g$ gilt: $\int_c^d f(x)dx\le\int_c^d g(x)dx$

Satz 5.19 (gliedweise Integration)
Ist $(f_n)_n$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Regelfunktionen $f_n:[c,d]\to\mathbb{C}$ mit Grenzfunktion $f:[c,d]\to\mathbb{C}$, so gilt $\lim_{n\to\infty}\int_c^d f_n(x)dx=\int_c^d f(x)dx$.

Satz 5.20 (Mittelwertsatz für stetige Regelfunktionen)
Ist $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und ist $p:[c,d]\to\mathbb{R}_0^+$ eine nicht-negative Regelfunktion, so existiert eine Zahl $\xi\in[c,d]$ mit $\int_c^d f(x)p(x)dx=f(\xi)\int_c^d p(x)dx$.

Satz 5.21 (Additivität des Integrals bezüglich der Integrationsintervalle)
Sei $f:[c,d]\to\mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Für jedes $m\in]c,d[$ sind dann auch $f|_{[c,m]} und f|_{[m,d]}$ Regelfunktionen und es gilt $\int_c^d f(x)dx=\int_c^m f(x)dx+\int_m^d f(x)dx$.

Satz 5.22 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f:[c,d]\to\mathbb{C}$ eine Regelfunktion, sei $a\in[c,d]$. Dann ist die Funktion $F:[c,d]\to\mathbb{C}$ $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ auf $[c,d]$ stetig, besitzt dort alle möglichen einseitigen Ableitungen und es gilt: $F'(x-)=\lim_{x\to a-} f(x)$ für jedes $x\in[c,d[$, $F'(x+)=\lim_{x\to a+} f(x)$ für jedes $x\in]c,d]$.

Definition 5.7 (Stammfunktion)
Unter einer Stammfunktion zu einer Funktion $f:[c,d]\to\mathbb{C}$ versteht man eine Funktion $F:[c,d]\to\mathbb{C}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:
- F ist auf [c,d] stetig
- Es gibt eine Menge: $A\subset[c,d]$ mit höchstens abzählbar unendlich vielen Punkten, so dass F in jedem Punkt $x\in[c,d]\setminus A$ differenzierbar ist mit $F'(x)=f(x)$.

Satz 5.23 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Variante)
Sei $f:[c,d]\to\mathbb{C}$ eine Regelfunktion.
- Dann besitzt f eine Stammfunktion. Ist $F:[c,d]\to\mathbb{C}$ solch eine Stammfunktion, so erhält man jede andere Stammfunktion zu f in der Form F + C mit einer Konstanten $C\in\mathbb{C}$.
- Ist $F:[c,d]\to\mathbb{C}$ eine beliebige Stammfunktion zu f, so gilt: $\int_c^d f(x)dx=F(d)-F(c):=F(x)|_c^d$.

Satz 5.24 (gliedweise Differentiation)
Gegeben sei eine Folge $(f_n)_n$ von differenzierbaren Funktionen $f_n:]c,d[\to\mathbb{C}$. Die Folge $(f'_n)_n$ der Ableitungen konvergiere auf $]c,d[$ gleichmäßig und es existiere ein Punkt $a\in]c,d[$, so dass die Zahlenfolge $(f_n(a))_n$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_n$ auf]c,d[gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f:]c,d[\to\mathbb{C}$ und es gilt: $f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ für alle $x\in]c,d[$.

Satz 5.25 (gliedweise Differentiation und Integration von Potenzreihen)

Gegeben sei eine Potenzreihe $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R\neq 0$. Für jedes $x\in]-R,R[$ gilt dann:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1} \quad , \quad \int f(x)dx=\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}+C \quad .$$

Satz 5.26 (Partielle Integration)

Für zwei differenzierbare Regelfunktionen $f,g:[c,d]\to \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_c^d f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)|_c^d-\int_c^d f'(x)g(x)dx \quad ,$$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

Satz 5.27 (Integration durch Substitution)

Sei $f:[c,d]\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $g:[C,D]\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

- Gilt $g([C,D])=[c,d]$ mit g(C) = c und g(D) = d, so folgt: $\int_c^{tud} f(x)dx=\int_C^D f(g(y))g'(y)dy$.
- Für $g([C,D])\subseteq[c,d]$ gilt: $\int f(x)dx|_{x=g(y)}=\int f(g(y))g'(y)dy$.
- Ist g streng monoton mit $g([C,D])\subseteq[c,d]$, so gilt: $\int f(x)dy=\int f(g(y))g'(y)dy|_{y=g^{-1}(x)}$

Satz 5.28 (Integration rationaler Funktionen)

Jede rationale Funktion mit reellen Koeffizienten besitzt auf ihrem natürlichen Definitionsbereich eine Stammfunktion, die eine Linearkombination aus einer rationalen Funktion sowie den folgenden Funktionen ist:

$$\log|x-a|,\, a\in\mathbb{R},\, \arctan\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}},\, b,c\in\mathbb{R},\, c>b^2 \quad .$$

Satz 5.29 (Trapez-Regel zur numerischen Integration)

Ist $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und existiert eine Zahl $M\geq 0$ mit $|g''(x)|\leq M$ für alle $x\in[c,d]$, so gilt $|\int_c^d f(x)dx-T_h(f)|\leq\frac{d-c}{12}h^2 M$, wobei $h:=(d-c)/n, n\in\mathbb{N}$ und

$$T_h(f):=h(\frac{1}{2}f(c)+f(c+h)+f(c+2h)+...+f(d-h)+\frac{1}{2}f(d)) \quad .$$

Definition 5.8 (uneigentliche Integrale)

Sei $c\in\mathbb{R}$ und $d\in]c,+\infty[$ oder $d=+\infty$. Ist $f:[c,d[\to\mathbb{C}$ eine Funktion, die auf jedem Teilintervall $[c,\xi]\subset[c,d[$ eine Regelfunktion ist, und existiert der Grenzwert $\lim_{\xi\to d-}\int_c^{\xi} f(x)dx$, so bezeichnet man diesen Grenzwert mit $\int_c^d f(x)dx$, nennt selbigen ein (rechtsseitig) uneigentliches Integral und die Funktion f auf [c,d [(rechtsseitig) uneigentlich integrierbar. Analog definiere man, was ein (linksseitig) uneigentliches Integral ist.

Satz 5.30 (Integralvergleichskriterium)

Ist $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ eine nicht-negative und monoton fallende Funktion, so existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^{n+1} f(x)dx)$ und ist eine Zahl im Intervall $[0,f(1)]$. Insbesondere ist die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ existiert.

Definition 5.9 (rektifizierbare Funktion und Bogenlänge)

Für eine Funktion $f:[c,d]\to\mathbb{C}$ sei $\Gamma:=f([c,d])$. Ist $Z=\{x_{0,}x_{1,...},x_n\}$ eine Zerlegung von [c,d] so setzen wir $L_Z(\Gamma):=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$. Existiert die reelle Zahl $L(\Gamma):=\sup_Z L_Z(\Gamma)$, wobei das Supremum über alle Zerlegungen Z von [c,d] zu nehmen ist, so heißt f rektifizierbar und $L(\Gamma)$ die Bogenlänge von Γ .

Satz 5.31 (Berechnung der Bogenlänge)

Ist $f:[c,d]\to\mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so ist f rektifizierbar mit $L(\Gamma)=\int_c^d|f'(x)|dx, \Gamma:=f([c,d])$.

Satz 5.32 (Regeln von Bernoulli und de l'Hospital)

Seien $f,g:]c,d[\to\mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in]c,d[$. Gilt dann:

- entweder $\lim_{x\to d-} f(x)=\lim_{x\to d-} g(x)=0$

– oder $\lim_{x \to d-} f(x) = \lim_{x \to d-} g(x) = +\infty$

und existiert der Grenzwert $\lim_{x \to d-} f'(x)/g'(x)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to d-} f(x)/g(x)$ und es gilt: $\lim_{x \to d-} f'(x)/g'(x) = \lim_{x \to d-} f(x)/g(x)$.

Satz 5.33 (Newton-Raphson-Iteration)
Sei $f:[c,d] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:
(a) f hat in [c,d] eine Nullstelle a.
(b) Für alle $x \in [c,d]$ gilt $f'(x) \neq 0$
(c) Für alle $x \in [c,d]$ gilt $f''(x) \neq 0$
(d) $f(c), f(d) \in [c,d]$

Dann liegen für jeden Startwert $x_0 \in [c,d]$ alle Glieder der rekursiv durch $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für $n \geq 0$ definierten Folge $(x_n)_n$ in [c,d] und konvergieren für $n \geq 1$ monoton gegen a.
Gelten für Zahlen $m, M \geq 0$ die Abschätzungen $|f'(x)| \geq m, |f''(x)| \leq M$ für alle $x \in [c,d]$, so besteht die Fehlerabschätzung $|a - x_n| \leq \frac{M}{2} m |x_n - x_{n-1}|^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.